ENSAIT
Ecole Nationale Supérieure des
Arts et Industries Textiles

CONCOURS D'ENTREE 1991

Epreuve de Mathématiques 2
Durée 2 Heures

(Tous les candidats)

Problème 1

1. Soit a un réel strictement compris entre 0 et 1.

Montrer que pour tout réel p et pour tout réel q strictement supérieur à -1

l'intégrale $\int_a^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q dx$ est convergente.

2.

2.1 - Rappeler le résultat classique suivant : $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^r}{x^\alpha}$, r étant un réel quelconque et α un réel strictement positif.

2.2 - On suppose encore : $0 < a < 1$

Montrer que, pour tout réel r et pour tout réel s strictement supérieur à 1

l'intégrale $\int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{(\ln x)^r}{x^s} dx$ est convergente (On pourra poser $s = 1 + 2\alpha$)

3. Déduire des questions précédentes que pour tout réel p et pour tout réel q tous deux strictement supérieur à -1 ,

l'intégrale $I(p,q) = \int_0^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q dx$ est convergente

4. Montrer que, pour tout réel p et pour tout réel q , tous deux strictement supérieurs à -1 ,

l'on a :

a) $I(p,q) = \int_0^{+\infty} e^{-(p+1)x} x^q dx$

b) $I(p,q) = \frac{1}{(p+1)^{q+1}} I(0,q)$

5.

a) Montrer que pour tout réel q strictement positif

$I(0,q) = q\, I(0,q-1)$

b) En déduire $I(p,q)$ pour p réel strictement supérieur à -1

et pour tout q entier positif ou nul .

A SUIVRE

Problème 2

Partie A

1. Calculer pour tout entier naturel p non nul $J_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x \, dx$

$$\left(\text{on obtient : } J_{2p} = \frac{\prod_{i=1}^{i=p} (2i-1)}{\prod_{i=1}^{i=p} 2i} \frac{\pi}{2} \right)$$

2. Donner les développements en série entière de Arctan (u) et de Argsh (u) en précisant le rayon de convergence.

3.

a) Montrer que, pour tout réel λ strictement compris entre - 1 et + 1 ,

l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \text{ Arctan } (\lambda \sin x) \, dx$ est convergente.

b) Développer en série entière la fonction f définie par :

$$\lambda \in]-1, +1[\qquad f(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \text{ Arctan } (\lambda \sin x) \, dx$$

Reconnaitre alors la fonction f .

Partie B

1. Montrer que $I_{2p} = J_{2p}$ avec $I_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x \, dx$

2. Soit $0 < u < 1$. On pose $F(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (\sin^2 x + u \cos^2 x) \, dx$

a) Montrer que $\frac{\pi}{2} F(u) = - \sum_{n \geq 1} \frac{(1-u)^n}{n} I_{2n}$

b) Montrer que F (u) est dérivable sur] 0 , 1 [, calculer F ' (u) à l'aide de fonctions usuelles et en déduire F (u) .

FIN